

Temat: **Monotoniczność funkcji.**

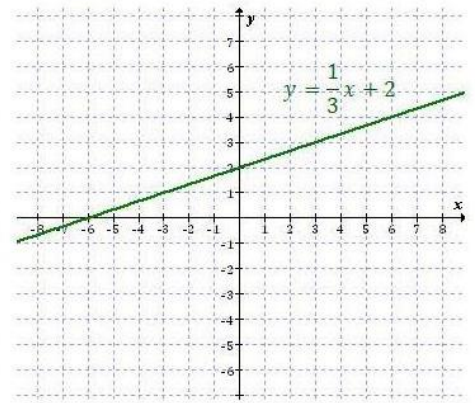
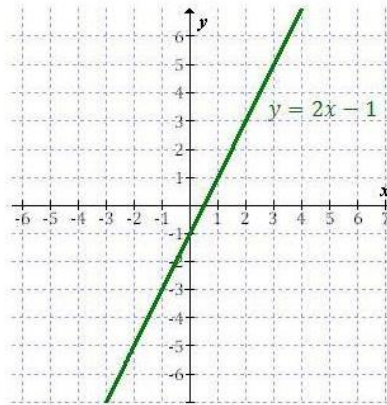
Wsparcie do tego tematu jest:

podręcznik strony 149 – 152 oraz film

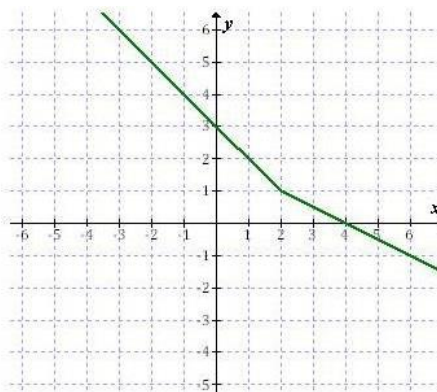
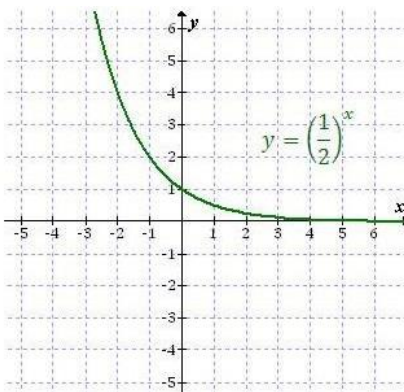
<https://www.youtube.com/watch?v=e5q4cY5QA6U>

Funkcja jest monotoniczna, jeżeli jest:

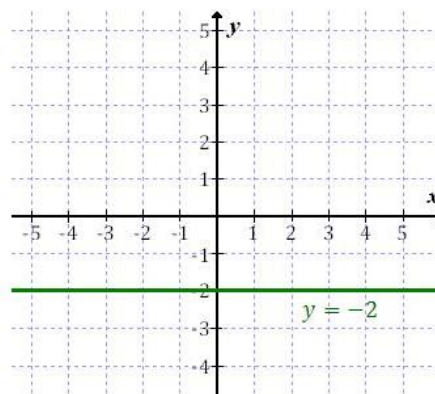
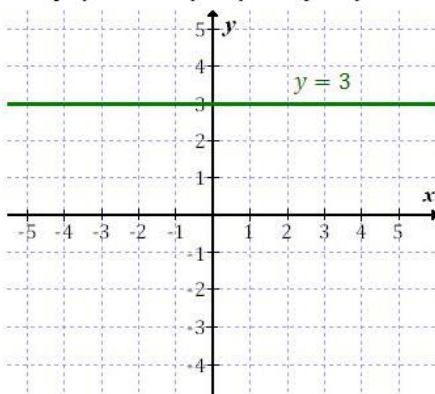
- rosnąca, albo
- malejąca, albo
- nierosnąca, albo
- niemalejąca, albo
- stała.



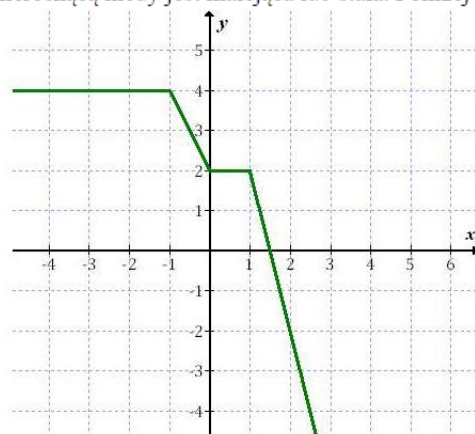
Funkcję $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.



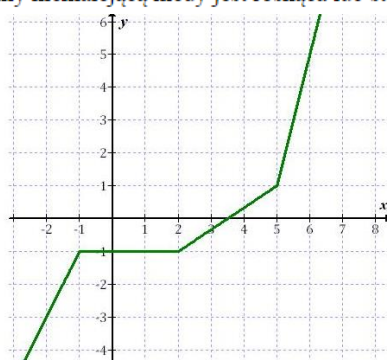
Funkcję nazywamy **stałą**, jeżeli dla wszystkich argumentów przyjmuje tę samą wartość.



Funkcję nazywamy nierosnącą kiedy jest malejąca lub stała. Poniżej znajduje się przykładowy wykres funkcji nierosnącej.



Funkcję nazywamy niemalejącą kiedy jest rosnąca lub stała. Poniżej znajduje się przykładowy wykres funkcji niemalejącej.

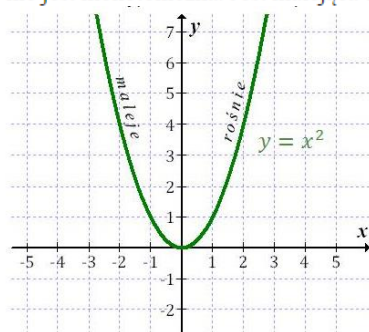


Funkcję nazywamy niemonotoniczną, gdy na pewnych przedziałach jest rosnąca, a na pewnych malejąca.

W takim przypadku można ewentualnie mówić, że funkcja jest monotoniczna przedziałami. Oto przykłady funkcji niemonotonicznych:

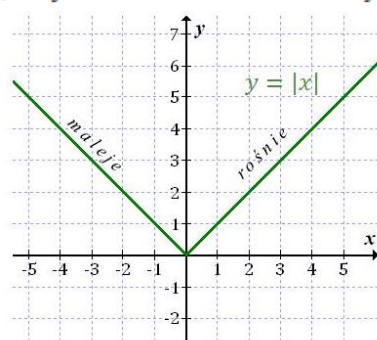
Przykład 1.

Funkcja $f(x) = x^2$ nie jest monotoniczna. Jest malejąca dla $x \in (-\infty, 0)$, a rosnąca dla $x \in (0, \infty)$.



Przykład 2.

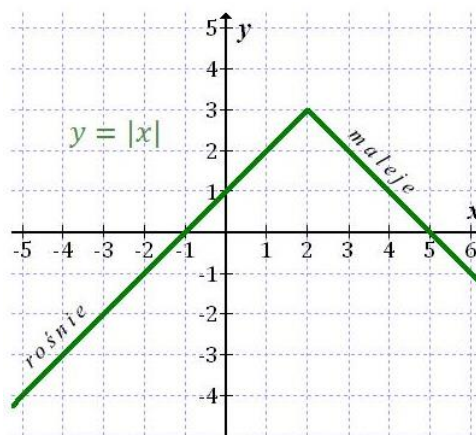
Funkcja $f(x) = |x|$ nie jest monotoniczna. Jest malejąca dla $x \in (-\infty, 0)$, a rosnąca dla $x \in (0, \infty)$.



Przykład 3.

Funkcja $f(x) = -|x - 2| + 3$ nie jest monotoniczna.

Jest malejąca dla $x \in (\infty, 2)$, a rosnąca dla $x \in (2, \infty)$.



Zadanie 1 str. 160

a) Cała funkcja nie jest monotoniczna.

Natomiast :

dla $x \in (-3; 2)$ $f(x) \searrow$

[co czytamy funkcja jest malejąca]

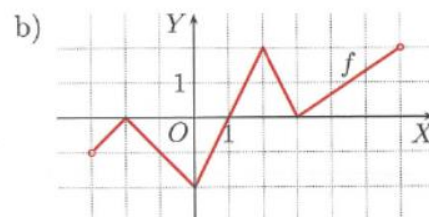
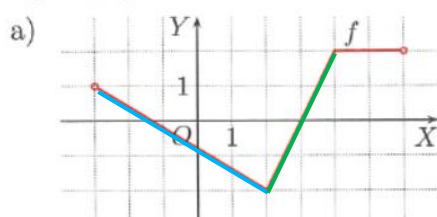
dla $x \in (2; 4)$ $f(x) \nearrow$

[co czytamy funkcja jest rosnąca]

dla $x \in (4; 6)$ $f(x) \rightarrow$

[co czytamy funkcja jest stała]

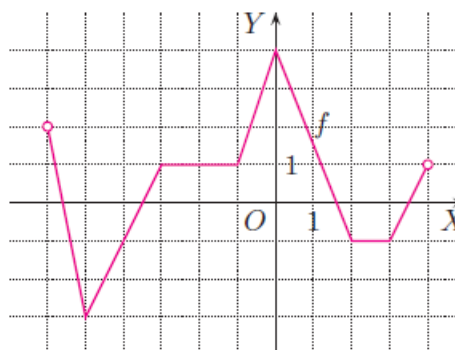
Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



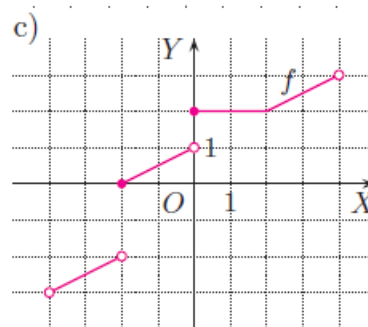
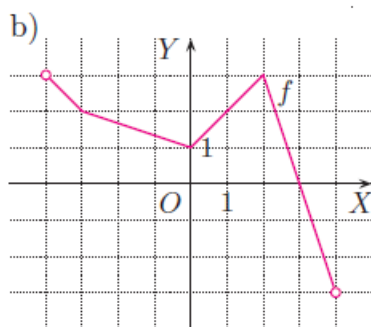
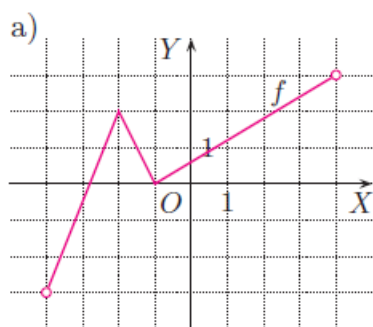
Zwracamy uwagę na kółka (czy są zamalowane czy nie) – linia ciągła to kółko zamalowane!

15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-6; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Wskaż zdania prawdziwe.

- ☐ A. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 3)$.
- ☐ B. f jest nierosnąca w przedziale $(0; 4)$.
- ☐ C. f jest malejąca w przedziale $(0; 2)$.
- ☐ D. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; -1)$.
- ☐ E. f jest niemalejąca w przedziale $(-5; 0)$.
- ☐ F. f jest rosnąca w przedziale $(-4; -2)$.



17. Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbb{R}$, korzystając z jej wykresu.



Temat: Odczytywanie własności funkcji z wykresu.

Z wykresu funkcji będziemy odczytywali następujące własności:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości,
- przedziały monotoniczności,
- miejsce zerowe,
- punkty przecięcia z osiami,
- argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie/ujemne,
- argumenty dla których funkcja przyjmuje daną wartość,
- argumenty dla których funkcja spełnia daną nierówność,
- sprawdzić, czy dany punkt należy do wykresu funkcji,
- wartość minimalną (minimum) i wartość maksymalną (maksimum).

Wsparcie do tego tematu jest:

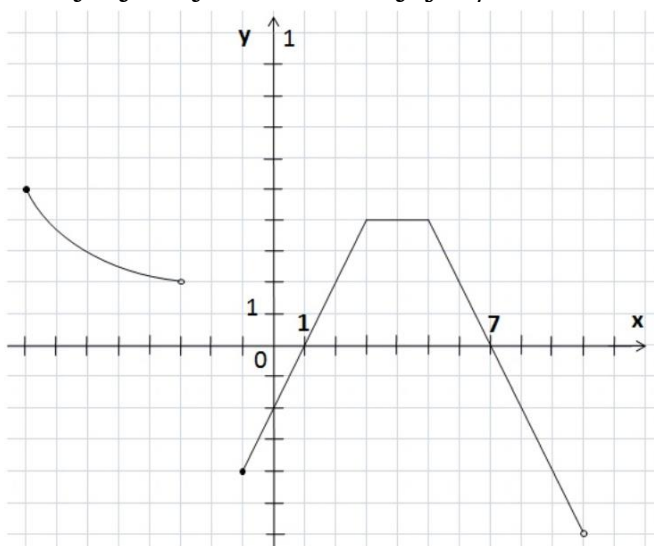
podręcznik strony 153 – 159 oraz filmy

<https://www.youtube.com/watch?v=exltU8mpMjs>

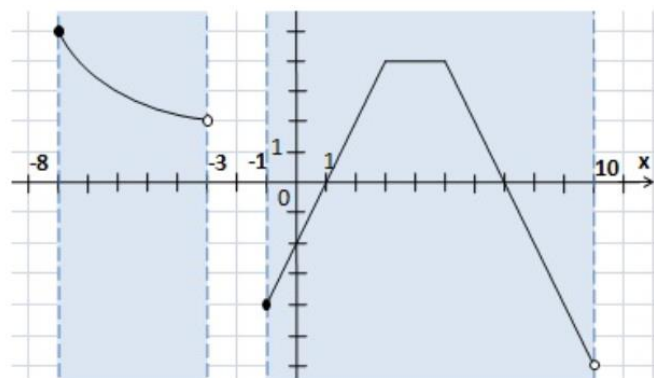
<https://www.youtube.com/watch?v=8gYsfirS9ec>

Przykład

Odczytaj z wykresu funkcji f w/w własności:



Dziedzina funkcji

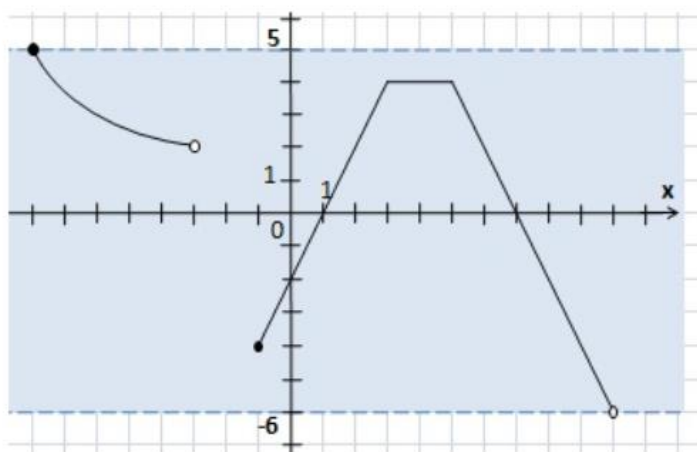


Dziedziną jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi OX):

Zwracamy uwagę na kółka (czy są zamalowane czy nie)

W tym wypadku dziedziną są dwa przedziały lewostronnie domknięte połączone znakiem sumy $D_f = \langle -8; -3 \rangle \cup \langle -1; 10 \rangle$

Zbiór wartości

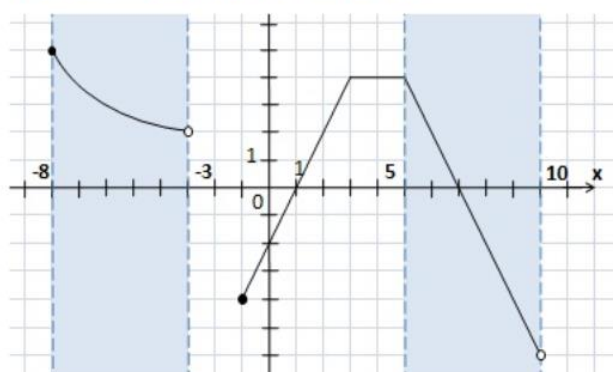


Zbiorem wartości jest przedział lub przedziały, w jakich rozciąga się wykres (wzdłuż osi OY):

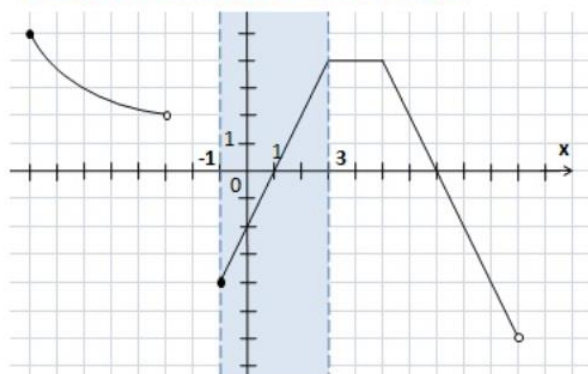
Zbiór wartości oznaczamy symbolem $f(D_f)$ lub Y_f $f(D_f) = (-6; 5)$

Przedziały monotoniczności

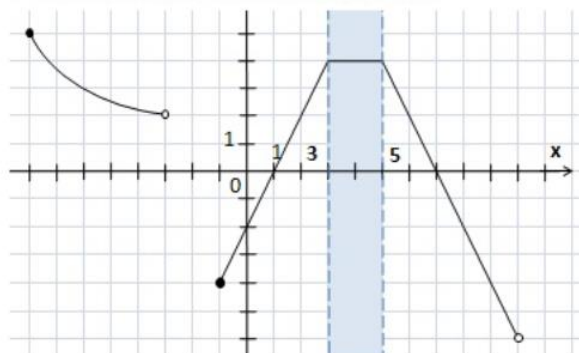
Rozpatrywana funkcja jest malejąca w dwóch przedziałach: od -8 do -3 oraz od 5 do 10:



Funkcja jest rosnąca w przedziale od -1 do 3.



Funkcja jest stała w przedziale od 3 do 5.



Można zapisać to:

$f(x) \searrow$ w przedziałach $\langle -8, -3 \rangle$ i $\langle 5, 10 \rangle$

$f(x) \nearrow$ w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$

$f(x) \rightarrow$ w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$

Częściej natomiast zapisujemy kolejne przedziały:

dla $x \in \langle -8; -3 \rangle$ $f(x) \searrow$ [czyt. dla $x \in \langle -8; -3 \rangle$ funkcja jest malejąca]

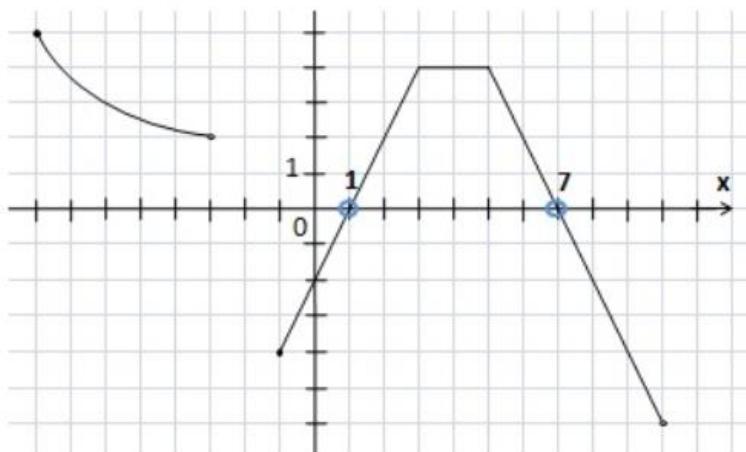
dla $x \in \langle -1; 3 \rangle$ $f(x) \nearrow$ [czyt. dla $x \in \langle -1; 3 \rangle$ funkcja jest rosnąca]

dla $x \in \langle 3; 5 \rangle$ $f(x) \rightarrow$ [czyt. dla $x \in \langle 3; 5 \rangle$ funkcja jest stała]

dla $x \in \langle 5; 10 \rangle$ $f(x) \searrow$ [czyt. dla $x \in \langle 5; 10 \rangle$ funkcja jest malejąca]

Miejsce zerowe

Miejsce zerowe, to argument (x), dla którego wartość (y) wynosi zero. Określenie miejsca zerowego, sprowadza się do odczytania argumentów (x) w punktach, w których wykres przecina oś odciętych (oś OX).



Przyjęło się, że:

- gdy mamy jedno miejsce zerowe oznaczamy je indeksem zero: x_0 ,
- gdy mamy więcej miejsc zerowych (tak jak w rozpatrywanym przykładzie) oznaczmy je kolejnymi liczbami naturalnymi i łączymy spójnikiem „lub” (v), czyli: $x_1 v x_2 v x_3 \dots$

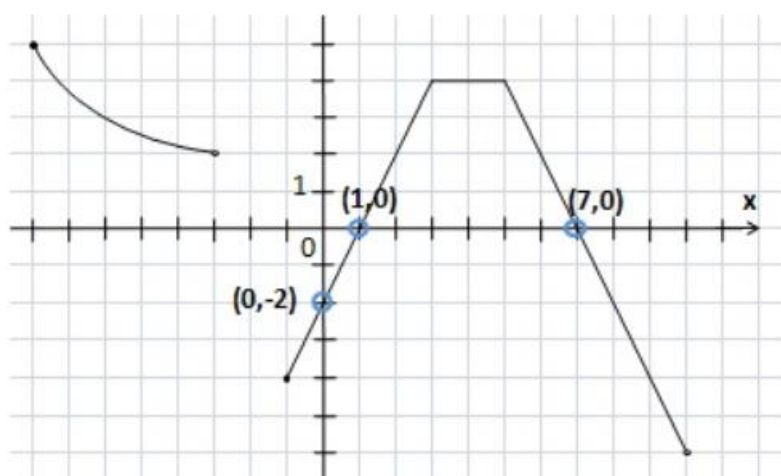
W tym wypadku mamy 2 miejsca zerowe, więc zapisujemy to:

$$f(x) = 0 \text{ dla } x_1 = 1 \text{ lub } x_2 = 7$$

Punkty przecięcia z osiami

Osobno zapisujemy punkty przecięcia z osią OX i punkt przecięcia z osią OY (zawsze jest tylko jeden).

Punkty przecięcia z osią OX znajdują się w miejscach zerowych, opisanych w poprzednim punkcie.



Zapisujemy:

Punkty przecięcia z osią OX :

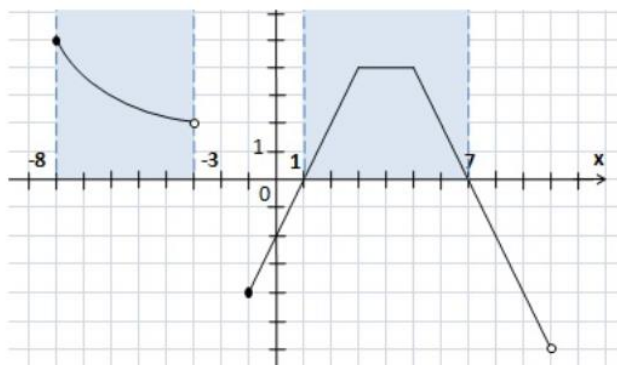
$(1, 0); (7, 0)$

Punkt przecięcia z osią OY :

$(0, -2)$

Argumenty dla których funkcja jest dodatnia: $f(x) > 0$

Są to przedziały argumentów (x), tych części wykresu, które znajdują się nad osią OX .

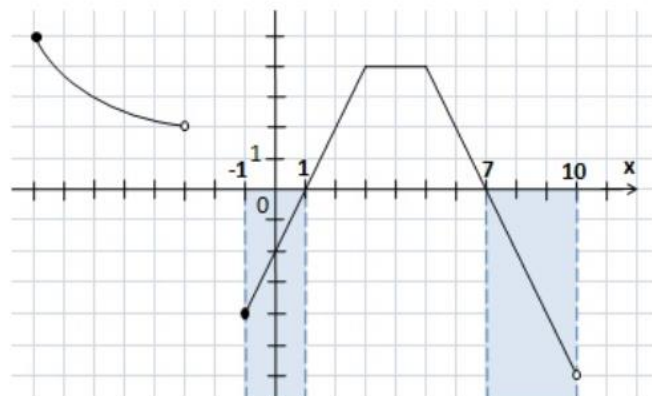


$$f(x) > 0 \quad \text{dla } x \in \langle -8, -3 \rangle \cup (1, 7)$$

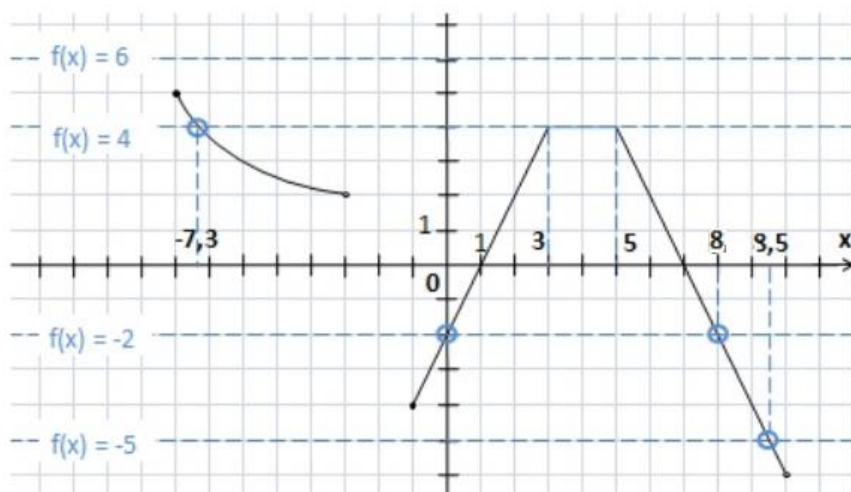
Zapisujemy przedziały. Nawiasy przy punktach leżących na osi OX , będą okrągłe, ponieważ w tych punktach wartość funkcji wynosi zero, a chodzi nam o wartości dodatnie (wyłącznie większe od zera).

Argumenty dla których funkcja jest ujemna: $f(x) < 0$

Są to przedziały argumentów (x), tych części wykresu, które znajdują się pod osią OX .



$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \cup (7, 10)$$

Argumenty dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Zapisujemy to:

$f(x) = 6$ - brak takich argumentów

$f(x) = 4$ dla $x \in \langle 3, 5 \rangle \cup \{-7,3\}$ -
w tym wypadku wartość 4 mamy dla argumentu -7,3 oraz w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$

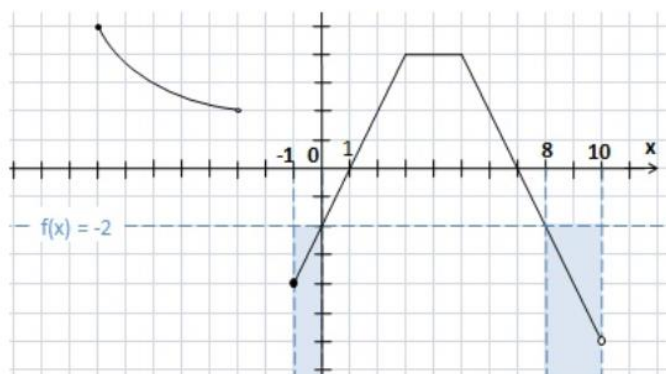
$f(x) = -2$ dla $x_1 = 0$ lub $x_2 = 8$

$f(x) = -5$ dla $x = 9,5$

Argumenty dla których funkcja spełnia daną nierówność

$$f(x) < -2$$

$$f(x) \leq -2$$

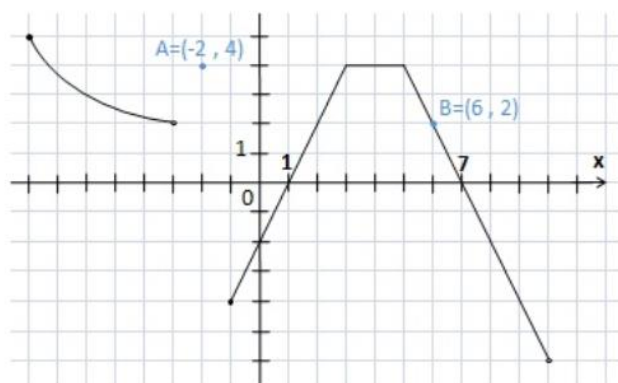


$$f(x) < -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 0 \rangle \cup (8, 10)$$

$$f(x) \leq -2 \quad \text{dla } x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 8, 10 \rangle$$

Sprawdzenie czy dany punkt należy do wykresu funkcji

Punkty: $A = (-2, 4)$, $B = (6, 2)$



Zapisujemy to:

$$A \notin f(x)$$

$$B \in f(x)$$

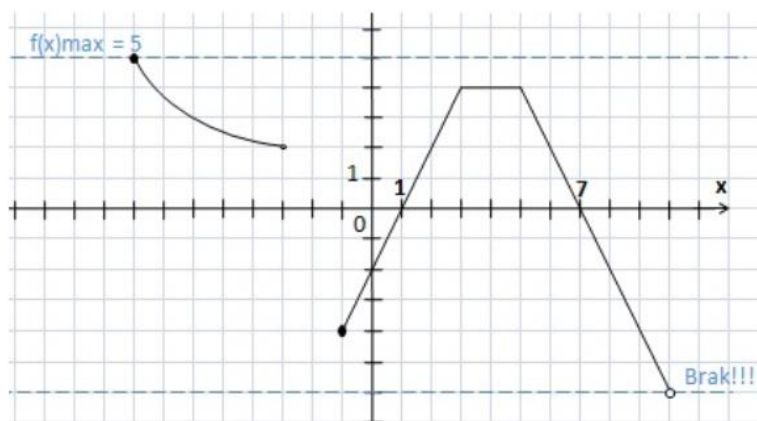
Minimum i maksimum

Minimalną wartość funkcji oznaczamy: $f(x)_{\min}$ lub $y_{\min}$.

Maksymalną wartość oznaczamy: $f(x)_{\max}$ lub $y_{\max}$.

Wartość maksymalna to wartość (y) najwyżej leżącego punktu wykresu, a minimalna punktu leżącego najniżej. Dodatkowo, oprócz samej wartości wypada podać argument (x) lub przedział argumentów, dla odczytanej wartości.

Jeżeli maksimum lub minimum funkcji wypada w punkcie, w którym znajduje się pusta kropka, minimum lub maksimum nie istnieje.

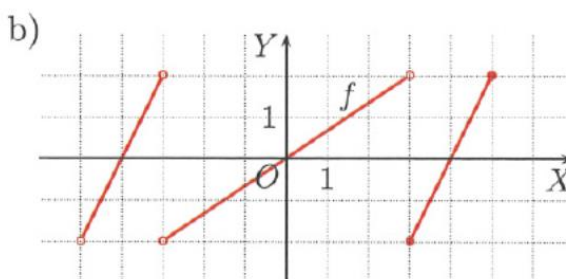
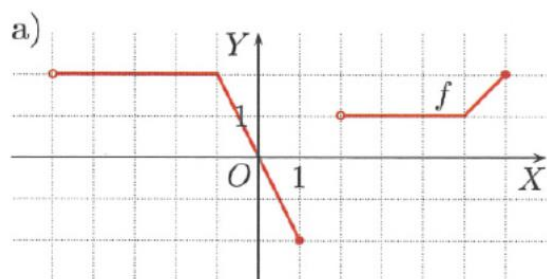


Minimum funkcji: brak.

Maksimum funkcji: $f(x)_{\max} = 5$ dla $x = -8$

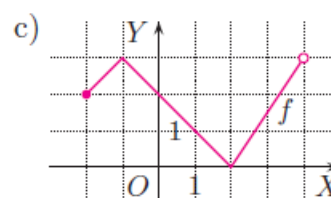
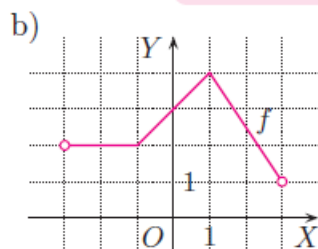
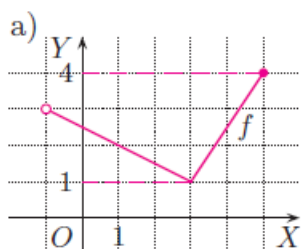
Ćwiczenie 1 str.161

Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę.



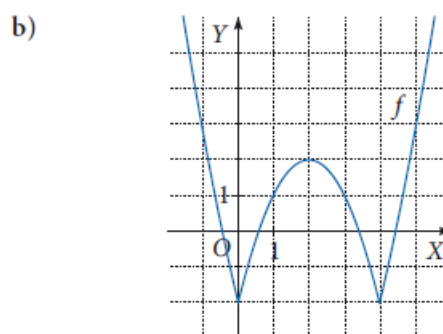
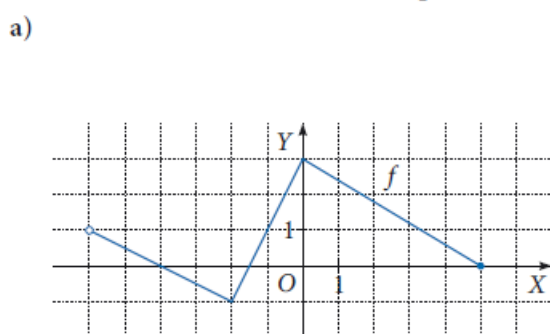
18. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę i zbiór wartości.

Zbiór wartości funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.



Zadanie 1.

Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



Zadanie 4. (0–1)

Wskaż wykres funkcji, która jednocześnie spełnia warunki:
zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -1; 3 \rangle$ i funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.

